

Programme de colle n°9

semaine du 24 au 28 novembre

Notions vues en cours

Chapitre 12 : Suites réelles

- Généralités : suite réelle, notation u ou (u_n) , terme général u_n , suite définie explicitement, implicitement, par récurrence
- Opérations $+$, $-$, $\times$, $\lambda \cdot$, $/$ et $\leq$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Propriété vérifiée à partir d'un certain rang
- Suite positive, négative, croissante, décroissante, monotone (strictement ou non), constante, stationnaire, majorée, minorée, bornée (avec CNS sur $|u_n|$),
- Limite finie ou infinie, notation $u_n \rightarrow \ell$ ou $\lim u_n = \ell$, nature d'une suite, suite CV, suite DV, unicité de la limite, toute suite CV est bornée
- Pour montrer que $u_n \rightarrow \ell$, on peut notamment majorer $|u_n - \ell|$ par une suite v_n qui tend vers 0. Si $u_n \rightarrow \ell$ alors $|u_n| \rightarrow |\ell|$
- Opérations sur les limites (version suites) : somme, produit, passage à l'inverse, quotient, limite de $f(u_n)$, formes indéterminées, $u_n \rightarrow 0$ et (v_n) bornée entraîne $u_n v_n \rightarrow 0$
- Passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'encadrement (des deux côtés ou d'un seul côté si une limite est infinie)
- Théorème de la limite monotone (version suites)
- Suites adjacentes : définition, théorème de convergence, la limite commune est encadrée par les deux suites
- Extractrice. Suites extraite (ou sous-suite), valeur d'adhérence, si une suite converge, toute sous-suite converge vers la même limite
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ . On pourra utiliser ce résultat sans démonstration.
- Théorème des segments emboîtés, théorème de Bolzano-Weierstrass (réel)
- Suites complexes : définition, suite bornée, extension des résultats du cas réel qui ne font pas appel à la notion d'ordre, Bolzano-Weierstrass complexe
- Vu en TD : suites définies implicitement

On pourra également donner des exercices "théoriques" sur les bornes supérieures et inférieures, comme les exercices 3, 4 et 5 du TD 12.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **10 ou 12**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaître.*

1. Définition de la limite *finie* d'une suite, unicité de la limite *finie* d'une suite Chapitre 13, Définition 13.7 (**item 1**), Théorème 13.8
2. Suites adjacentes : définition, théorème de convergence Chapitre 13, Définition 13.22 et Théorème 12.23
3. Révision de certains chapitres depuis le début de l'année pour se préparer au DS : six questions Flash portant sur les chapitres 6, 7, 8, 9, 10 et 12, en plus de la question Flash prévue normalement (mais cette dernière ne peut porter que sur les chapitres 10 ou 12).

Questions Flash au programme :

Chapitre 12 :

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Que doit vérifier M pour être un majorant de A ? pour être le maximum de A ?
- Que veut-dire la phrase " $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure" ?
- Compléter la caractérisation de la borne inférieure "avec des ε " : $m = \inf A \iff \dots$
- Compléter la caractérisation de la borne supérieure avec des suites : $M = \sup A \iff \dots$
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de l'écriture " $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$ "
- Soit $D \subset \mathbb{R}$. Donner une définition de " D est dense dans $\mathbb{R}$ " (deux assertions possibles, une seule suffit).
- Soit $D \subset \mathbb{R}$. Donner une caractérisation de " D est dense dans $\mathbb{R}$ " en termes de suites.

Chapitre 10 :

- Donner une primitive de $\frac{u'}{u}$. En déduire une primitive de $\frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x}$.
- Donner une primitive de $u' u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $\operatorname{sh} x \times \frac{1}{\operatorname{ch}^n x}$.
- Donner une primitive de $u' u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $\cos x \sqrt{\sin x}$.
- Donner une primitive de $u'(ax+b)$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. En déduire une primitive de $\tan(2x+3)$.
- Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I , quelles sont toutes les primitives de f sur I ?
- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Donner la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Soit $a \geq 0$. Que peut-on dire de $\int_{-a}^a f$ si f est impaire ? et si f est paire ?

Questions Flash supplémentaires :

Ces questions Flash ne peuvent être posées que dans le cadre de la troisième Question Longue.

Chapitre 9 :

- Énoncer le théorème de la bijection monotone. On pourra en faire tout ou partie oralement...
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective. Quelles sont les hypothèses à vérifier pour affirmer que f^{-1} est dérivable en y ? Que vaut alors $(f^{-1})'(y)$?
- Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer x^y avec des fonctions usuelles. Pour quelles valeurs de x et de y est-ce que cela a un sens ?
- Énoncer les croissances comparées en $+\infty$
- Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $\arcsin$? et de $\arccos$?
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $\arcsin(\sin x) = x$? Et $\sin(\arcsin x) = x$?
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $\arccos(\cos x) = x$? Et $\cos(\arccos x) = x$?
- Donner les dérivées de $\arccos x$ et de $\arctan x$.
- Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $\arctan$? et de th ?
- Donner deux expressions de la dérivée de $\text{th} x$.

Chapitre 8 :

- Soit f, g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Que signifie $f \leq g$?
- Soit f et g deux fonctions dont on note D_f et D_g les ensembles de définitions. Que doit vérifier un réel x pour que $(g \circ f)(x)$ ait un sens ?
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est croissante” et de “ f est strictement décroissante”
- Si f est croissante et g est décroissante, quelle est la monotonie de $g \circ f$? Et si f et g sont toutes deux décroissantes ?
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est majorée”
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner une caractérisation en termes de quantificateurs de “ f est bornée”
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f admet un minimum en a ”
- Donner la définition de “ f est continue en a ”
- Donner la définition de “ f est dérivable en a ”
- Donner deux formules de dérivation (au choix de l'examineur)

Chapitre 7 :

- Soit $A \subset E$. Donner la définition de l'application indicatrice sur A .
- Soit $f : E \rightarrow F$ et $B \subset F$. Compléter : $x \in f^{-1}(B) \iff \dots\dots$
- Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. Compléter : $y \in f(A) \iff \dots\dots$
- Soit $f : E \rightarrow F$. Donner la définition de “ f est injective” en termes de quantificateurs.
- Idem que ci-dessus, ou bien avec “ f est surjective”, ou bien avec “ f est bijective”.
- Soit $f : E \rightarrow F$. Si f est injective, que peut-on dire de l'équation $(\text{Eq}_y) : y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$?
- Idem que ci-dessus, ou bien avec “ f est surjective”, ou bien avec “ f est bijective”.
- Compléter les formules : $(f^{-1})^{-1} = \dots$ et $(g \circ f)^{-1} = \dots$
- Rappeler la définition d'une similitude directe.

Chapitre 6 :

- Soit z et z' deux complexes et λ un réel. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\text{Re}(z + z') = \dots \quad \text{Im}(zz') = \dots \quad \text{Re}(\lambda z) = \dots \quad \text{Im}(\bar{z}) = \dots$$

- Compléter les formules suivantes : $z + \bar{z} = \dots$ et $z - \bar{z} = \dots$
- Compléter l'identité remarquable suivante : $|u + v|^2 = \dots$
- À quelle condition sur u et v a-t-on $|u + v| = |u| + |v|$?
- Donner les deux formules d'Euler.
- À quelle condition est-ce qu'un complexe z admet une forme trigonométrique ? Donner cette forme en précisant dans quels ensembles appartiennent chaque nouvelle variable.
- Mettre sous forme trigonométrique un complexe de la forme a et/ou de la forme ib avec a et b deux réels choisis par l'examineur.
- Si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ (avec $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$), que peut-on en déduire sur r, r', θ, θ' ?
- Combien de racines carrées possède un nombre complexe ω ? Si z est une de ces racines, que peut-on dire ?
- On considère le polynôme $az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Que vaut la somme de ses racines ? et le produit ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines n -ièmes de l'unité ?
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrire e^z sous forme trigonométrique.
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. À quelle condition sur $\arg(z)$ a-t-on $z \in \mathbb{R}_+^*$? et $z \in \mathbb{R}^*$?